Z definice typů singularit okamžitě vyplývá:

- má-li f v z odstranitelnou singularitu, potom lze f holomorfně rozšířit na okolí z,
- má-li f v z pól, potom existuje okolí $U(z,\rho)$ a $g \in H(U(z,\rho))$, $g(z) \neq 0$, že $f(w) = \frac{g(w)}{(w-z)}$, $w \in U(z,\rho)$.

Věta 1 (charakterizace typů singularit)**.** *Nechť f má v bodě z izolovanou singularitu, potom je ekvivalentní*

1. *f má v z odstranitelnou singularitu,*
2. *$\lim\limits_{w\to z} f(w)$ existuje (vlastní),*
3. *f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu z.*

Dále je ekvivalentní

1. *f má v z pól,*
2. *$\lim\limits_{w\to z} f(w) = \infty$.*

Nakonec je ekvivalentní

1. *f má v z podstatnou singularitu,*
2. *pro každé dostatečně malé $\rho > 0$ platí $\overline{f(U(z,0,\rho))} = \mathbb{C}$.*

Poznámky a příklady.

- *(kořen a násobnost kořenu) Nechť f je holomorfní na okolí bodu a a $n \in \mathbb{N}$, potom říkáme, že f má f a kořen násobnosti n, pokud*

$$f^{(n)}(a) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

  Platí následující: f má v bodě a pól násobnosti k právě tehdy, když $\frac{1}{f}$ má (po dodefinování hodnotou 0 v a) v bodě a kořen násobnosti k.

- *(Picardova věta) Pro podstatné singularity platí dokonce následující silnější tvrzení: má-li f v a podstatnou singularitu, potom pro každé dostatečně malé $\rho > 0$ obsahuje množina $\mathbb{C} \setminus f(U(z,0,\rho))$ nejvýše jeden bod.*

Definice 2 (reziduum)**.** *Nechť f má v bodě a izolovanou singularitu a Laurentovu řadu $S = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, potom koeficient c_{-1} nazýváme **reziduem** f **v bodě** a (zn. $\operatorname{res}(f,a)$).*

Věta 3 (reziduová věta)**.** *Nechť , $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $\partial\Omega$ lze popsat jako kladně orientovanou, prostou, po částech regulární a C^1 křivku γ. Nechť dále $a_1, \dots, a_N \in \Omega$, $\overline{\Omega} \subset A$ a $f \in H(A \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$, potom*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{res}(f, a_n).$$

Věta 4 (o výpočtu reziduí)**.** *Platí*

1. *má-li* f *v bodě* a *odstranitelnou singularitu, potom* $\operatorname{res}(f,a)=0$,
2. *má-li* f *v bodě* a *pól násobnosti nejvýše* n, *potom* $\operatorname{res}(f,a)=\lim_{z\to a}\left[\frac{f(z)(z-a)^n}{(n-1)!}\right]^{(n-1)}$,
3. *jsou-li* f *a* g *holomorfní na okolí bodu* a *a* $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, *potom* $\operatorname{res}(\frac{f}{g},a)=\frac{f(a)}{g'(a)}$,
4. *je-li* f *holomorfní na okolí bodu* a *a* g *má v* a *pól násobnosti* 1, *potom* $\operatorname{res}(fg,a)=f(a)\operatorname{res}(g,a)$.